

11 класс

Задача №11-Е1. Надувательство

Подключим к трубке шприц. Погрузим свободный конец трубки в воду. Двигая поршень шприца, наберем в трубку $V_0 = (7,0 \pm 0,2)$ мл воды. Измерим длину столба воды в трубке $h_0 = (97,1 \pm 0,2)$ см (трубка при измерениях должна быть расположена горизонтально). Рассчитаем площадь поперечного сечения трубки:

$$S_0 = \frac{V_0}{h_0} = (0,072 \pm 0,002) \text{ см}^2.$$

Погрешность измерения оценим, сложив относительные погрешности измерения объема и площади. Заметим при этом, что относительная погрешность измерения длины много меньше относительной погрешности измерения объема.

$$\sigma_{S_0} = S_0 \left(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_{h_0}}{h_0} \right)$$

Заполнять трубку можно и другим способом: набрать в шприц 10 мл воды, подключить к шприцу пустую трубку и, нажимая на поршень шприца, заполнить трубку водой. Такой способ не является ошибочным. Однако опытным путем можно установить, что при таком способе заполнения в столбике воды в трубке чаще образуются пузыри воздуха, особенно в случае загрязненной внутренней поверхности трубки.

Опустошим трубку. Вновь погрузим свободный конец трубки в воду. Двигая поршень шприца, наберем в трубку приблизительно 4 мл воды. Вытащим свободный конец трубки из воды и переместим с помощью шприца столбик воды ближе к шприцу так, чтобы расстояние от края столбика воды до свободного конца трубки было приблизительно равно длине столбика воды. Вставим в открытый конец трубки пробку. Отключим шприц от трубки. Измерим длину столба воздуха $l_0 = (40,2 \pm 0,1)$ см в трубке, заключенного между местом пережатия трубки и краем столбика воды. Приклеим на поверхность стола мерную ленту, к которой сверху приклеим исследуемую трубку в распрявленном состоянии (см. рис. 2). Подсоединим шприц к оставшемуся открытому концу трубки.

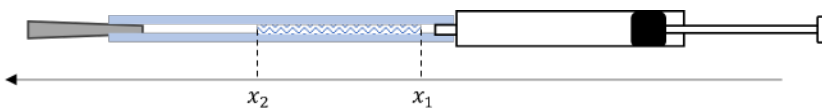


Рис. 2 Установка для измерений.

Обозначим координату ближнего к шприцу края столба жидкости в трубке за x_1 , а дальнего — x_2 . Будем надавливать на поршень шприца и измерять величины: x_1 и x_2 .

x_1 , см	x_2 , см	$\Delta p, 10^5$ Па	$\sigma_{\Delta p}, 10^5$ Па	$\frac{\Delta S}{S_0}, 10^{-2}$
4,8	60,2	0,000	0,000	0,00
9,2	64,1	0,117	0,003	0,90
13,2	67,6	0,248	0,005	1,81
16,6	70,5	0,381	0,006	2,71
20,8	74,0	0,583	0,008	3,97
24,4	76,8	0,796	0,011	5,42
29,3	80,5	1,173	0,016	7,58

Объем воды в трубке в течение эксперимента не меняется.

$$(x_{20} - x_{10})S_0 = (x_2 - x_1)(S_0 + \Delta S),$$

где x_{10} , x_{20} - координаты столба жидкости при атмосферном давлении.

Тогда через изменения длины столбика воды в трубке легко вычислить относительное изменение ее сечения:

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \frac{x_{20} - x_{10}}{x_2 - x_1} - 1$$

Изменение давления в системе можно определить по изменению объема воздуха в трубке, ограниченного столбом воды и местом пережатия трубки. Воспользуемся для этого законом Менделеева-Клапейрона:

$$p_0 l_0 S_0 = p(l_0 - (x_2 - x_{20}))(S_0 + \Delta S).$$

Тогда для избыточного давления внутри шприца имеем:

$$\Delta p = p - p_0 = p_0 \left(\frac{l_0}{l_0 - (x_2 - x_{20})} \frac{S_0}{S_0 + \Delta S} - 1 \right).$$

Подставляя выражение для отношения площадей получаем:

$$\Delta p = p - p_0 = p_0 \left(\frac{l_0}{l_0 - (x_2 - x_{20})} \frac{x_2 - x_1}{x_{20} - x_{10}} - 1 \right).$$

Рассчитаем величины относительного изменения сечения трубки и изменения давления в ней.

Погрешность относительного изменения сечения трубки рассчитаем, просуммировав относительные погрешности начальной и текущей длин столбика воды в трубке.

$$\sigma_{\frac{\Delta S}{S_0}} = \left(\frac{\Delta S}{S_0} + 1 \right) \left(\frac{2\sigma_x}{x_{10} - x_{20}} + \frac{2\sigma_x}{x_2 - x_1} \right)$$

где $\sigma_x = 0,5$ мм - половина цены деления шкалы мерной ленты.

С учетом того, что $\frac{\Delta S}{S_0} \ll 1$ и $x_2 - x_1 \approx x_{10} - x_{20}$ можно сказать, что погрешность относительного изменения сечения практически не меняется и может быть вычислена как:

$$\sigma_{\frac{\Delta S}{S_0}} = \frac{4\sigma_x}{x_{10} - x_{20}} = 0,4 \cdot 10^{-2}$$

Погрешность изменения давления рассчитаем по следующей формуле:

$$\sigma_{\Delta p} = (p_0 + \Delta p) \left(\frac{4\sigma_x}{x_{10} - x_{20}} + \frac{\frac{2\sigma_x}{x_2 - x_{20}} + \frac{\sigma_{l_0}}{l_0}}{1 - \frac{x_2 - x_{20}}{l_0}} \frac{x_2 - x_{20}}{l_0} \right).$$

Построим график зависимости $\frac{\Delta S}{S_0}(\Delta p)$. Видно, что график можно описать прямой пропорциональностью с угловым коэффициентом:

$$\alpha = (6,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}.$$

Относительная ошибка измерения α составляет $\varepsilon_\alpha \approx 4,4\%$.

Можно предположить, что учет изменения сечения трубки для подсчета давления в системе, мало повлияет на расчетную величину α . То есть провести расчет избыточных давлений по формуле:

$$\Delta p = p - p_0 = p_0 \left(\frac{l_0}{l_0 - (x_2 - x_{20})} - 1 \right).$$

Однако величина α , полученная при таком способе расчета, будет отличаться от результата, полученного с учетом изменения площади сечения, на $\approx 15\%$, что существенно превышает рассчитанную относительную ошибку измерения.

Заметим, что измерение давления в системе можно проводить, наблюдая за количеством воздуха в шприце. Для этого необходимо часть шприца заполнить водой, а в части шприца оставить воздух. Далее создавать давление в системе необходимо будет, держа шприц вертикально и надавливая на его поршень. Часть воды из шприца будет поступать в трубку, а воздух в верхней части шприца будет сжиматься под действием давления. Измеряя отношение объема воздуха в шприце под давлением к начальному объему воздуха в нем, можно рассчитать давление в системе. Длина столба воздуха в таких измерениях существенно меньше возможной длины столба воздуха в трубке. Поэтому этот способ измерения давления обладает гораздо меньшей точностью. Также заметим, что стенки шприца достаточно жесткие, однако, если заполнить его водой полностью и попробовать сдвинуть поршень при заткнутом носике, то поршень все же немного сдвинется. Это происходит из-за деформации резиновой прокладки между поршнем и резервуарной частью шприца. Этот эффект меньше цены деления шприца, поэтому им можно пренебречь.

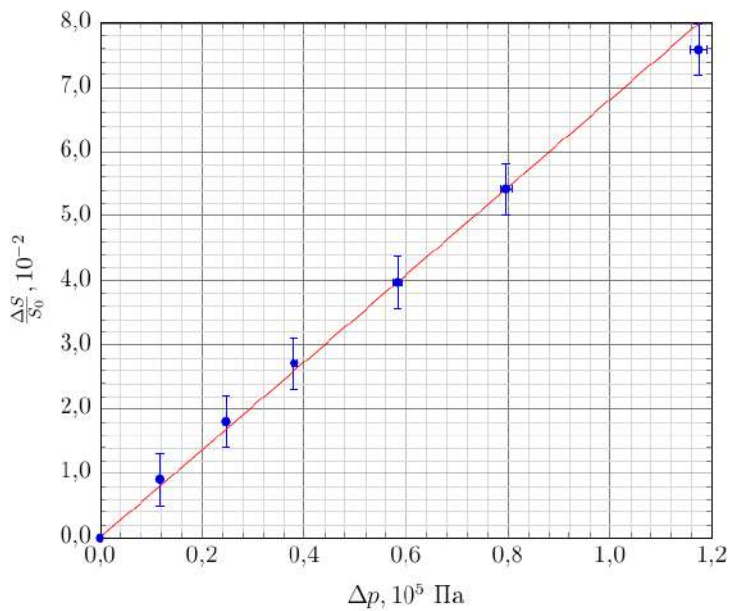


График зависимости относительного изменения площади поперечного сечения трубки от избыточного давления в ней.

11 класс

Задача №11-Е2. Источник и конденсатор

Подключаем последовательно источник, конденсатор и вольтметр, замыкаем цепь и фиксируем время изменения напряжения вольтметра от значения U_1 до U_2 . В качестве значения U_1 нельзя выбирать показания прибора в первые две – три секунды после включения, так как из-за инерции цифрового прибора они недостоверны. Аналогичные измерения повторяем несколько раз, каждый раз отключая конденсатор и замыкая его выводы для полного разряда. Для заряда конденсатора

$$\frac{dq}{dt}(2r + R_V) = U_0 - \frac{q}{C},$$

$$q = CU_0 \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right),$$

где U_0 , r – ЭДС и внутреннее сопротивление источника, R_V – сопротивление вольтметра, $\tau_1 = C(2r + R_V)$ – характерное время заряда конденсатора. Напряжение на вольтметре при этом

$$U_V = \frac{dq}{dt}(2r + R_V) = \frac{U_0 R_V}{r + R_V} e^{-t/\tau_1}$$

Для отношения напряжений, измеренных вольтметром с разницей по времени Δt

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\Delta t/\tau_1},$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{\Delta t}{\ln \frac{U_1}{U_2}}.$$

Экспериментальные результаты, полученные для разных пар значений U_1 и U_2 , и пересчитанные на основании этих результатов значения τ_1 представлены в таблице 1.

Усреднённое по сериям экспериментов характерное время заряда конденсатора составляет $\tau_1 = 18,83$ с.

U_1 , В	U_2 , В	Δt , с	Δt сред- нее, с	τ_1 , с
1,5	0,5	20,62	20,79	18,92
		20,94		
		21,00		
		20,66		
		20,72		
1,6	0,8	13,03	13,12	18,93
		13,06		
		13,09		
		13,28		
		13,18		
1,6	0,4	25,91	25,82	18,63
		25,72		
		25,94		
		25,78		
		25,75		

Подключаем конденсатор к источнику, держим его подключенным в течение одной-двух минут, затем отключаем. Подключаем к заряженному конденсатору вольтметр и фиксируем время, в течение которого конденсатор разряжается от напряжения U_3 до U_4 . Для заряда на конденсаторе в этом процессе

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{(R_V + r)C},$$

$$q = CU_0 e^{-t/\tau_2},$$

где τ_2 – характерное время разряда конденсатора через вольтметр, $\tau_2 = (R_V + r)C$. Для напряжения вольтметра справедливо $U_V = CU_0 e^{-t/\tau_2}$

Для отношения напряжений, измеренных вольтметром с разницей по времени Δt

$$\frac{U_3}{U_4} = e^{\Delta t/\tau_2}$$

Отсюда

$$\tau_2 = \frac{\Delta t}{\ln \frac{U_3}{U_4}}.$$

По-прежнему, в качестве значения U_3 нельзя выбирать показания прибора в первые две – три секунды после включения. Экспериментальные результаты, полученные для разных пар значений U_3 и U_4 , и пересчитанные на основании этих результатов значения τ_2 представлены в таблице 2.

Усреднённое по сериям экспериментов характерное время заряда конденсатора составило $\tau_2 = 11,30$ с.

U_3 , В	U_4 , В	Δt , с	Δt среднее, с	τ_2 среднее, с
1,5	0,5	12,34 12,38 12,34 12,40 12,43	12,38	11,27
2,0	1,0	7,88 7,82 7,81 7,81 7,94	7,85	11,33
2,0	0,5	15,78 15,59 15,72 15,65 15,63	15,67	11,31

Определим внутреннее сопротивление источника. Используя результаты измерений τ_1 и τ_2 , можно определить отношение

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2r + R_V}{r + R_V} = 1,67.$$

Отсюда

$$\frac{r}{R_V} \approx 2,0, \quad r \approx 2,0 \text{ МОм.}$$

Определим ЭДС источника. Подключаем вольтметр к источнику. Напряжение на вольтметре

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{R_V + r}.$$

Экспериментально измеренное значение $U_V = 3,24$ В. Отсюда

$$U_0 = U_V \frac{R_V + r}{R_V} \approx 9,72 \text{ В.}$$

Значение электрической емкости конденсатора

$$C = \frac{\tau_1}{2r + R_V} \approx 3,75 \text{ мкФ.}$$

Шифр

 Σ **11-Е1. Надувательство**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Предложен метод определения площади поперечного сечения трубки через объём воды из шприца.	0.5		
1.2	Экспериментально определена площадь сечения трубки. При этом полученное значение отличается от данных жюри не более, чем на 5%.	0.5		
1.3	Корректно оценена погрешность измерения площади поперечного сечения трубки при атмосферном давлении.	0.5		
2.1	Предложен метод определения изменения площади поперечного сечения трубки через изменение длины столбика воды в трубке. *	2.0		
2.2	Длина столба жидкости, выбранная для измерения изменения длины, составляет не менее 50 см; *	1.0		
	— не менее 30 см;	0.5		
	— менее 30 см.	0.0		
2.3	Для измерения давления в трубке использовано изменение длины участка с воздухом между зажимом и столбиком воды. **	2.0		
2.4	Начальная длина участка с воздухом, взятая для измерения давления в системе, составляет ** не менее 30 см;	1.0		
	— не менее 15 см;	0.5		
	— менее 15 см.	0.0		
2.5	Учтено изменение площади поперечного сечения трубки при измерении объема воздуха в ней под давлением. **	1.0		
2.6	Проведены измерения. Каждая экспериментальная точка (не включая исходное значение при $\Delta p = 0$) оценивается в 0,5 балла, но не более 2,5 баллов за все точки.	5 точек по 0.5		
2.7	Экспериментальные точки равномерно покрывают весь диапазон от 0 до 10^5 Па.	1.0		

2.8	Осуществлен пересчет прямых измерений в величины $\Delta S/S_0$ и Δp . Пересчет каждой точки (не включая исходное значение при $\Delta p = 0$) оценивается в 0,5 балла, но не более 2,5 баллов за все точки.	5 точек по 0.5		
	Построен график зависимости $\Delta S/S_0(\Delta p)$ или аналогичный, позволяющий с помощью дальнейших вычислений определить величину α .			
2.9	Оси графика подписаны в соответствии с требованиями; размеры графика и область, в которой располагаются экспериментальные точки, соответствует требованиям.	0.5		
2.10	Масштаб осей и их оцифровка соответствуют требованиям.	0.5		
2.11	Правильно нанесены все экспериментальные точки. Пункт оценивается даже без нанесения крестов ошибок для экспериментальных точек.	0.5		
2.12	Проведена прямая, описывающая зависимость $\Delta S/S_0(\Delta p)$.	0.5		
2.13	На основании экспериментальных результатов с помощью графика определено значение α^* . При этом: значение α отличается от данных жюри не более, чем на 15%; — значение α отличается от данных жюри не более, чем на 25%; — значение α отличается от данных жюри не более, чем на 35% .	2.0 1.0 0.5		
2.14	Корректно оценена погрешность измерения относительного изменения площади сечения. Корректно оценена погрешность измерения избыточного давления.	0.5		
2.15	На график нанесены кресты погрешностей. Пункт ставится только при выполненном предыдущем пункте.	0.5		

2.16	<p>Корректно оценена погрешность определения α. Пункт может быть оценен даже, если не оценены пункт о нахождении погрешностей изменения сечения и изменения давления в системе, а также пункт о нанесении крестов погрешностей на график.</p> <p>Пункт не оценивается, если не получены баллы за результат измерений α.</p>	0.5		
	<p>Примечания: * - если изменение площади сечения трубки предложено определять через объём жидкости, закачиваемой из шприца под давлением, без учёта изменения длины самой трубки, баллы за пп. 2.1, 2.2, 2.13 не ставятся. Остальные пункты могут быть оценены в соответствии с разбалловкой. ** - если избыточное давление в трубке определяется по изменению длины воздушного столба в шприце, то: за пункт №2.3 может быть выставлен полный балл; в пункте №2.4 может быть выставлено 0 баллов или 0,5 баллов. 0,5 баллов выставляется в случае, если объём измеряемого воздушного столба при атмосферном давлении составляет не менее половины объёма шприца; за пункт №2.5 может быть выставлен 1 балл только в случае, если участник оценил изменение объёма шприца, возникающее за счёт сжатия уплотнителя поршня шприца.</p>			

Шифр

 Σ **11-Е2. Источник и конденсатор**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Решение содержит идею определения характерных времён заряда-разряда конденсатора при различных сопротивлениях.	1.0		
1.2	Получено или используется при решении выражение для зависимости от времени напряжения на вольтметре при разряде конденсатора через вольтметр $U_V = CU_0 e^{-t/\tau_2}$, либо эквивалентное ему.	1.0		
1.3	Получено или используется при решении выражение для зависимости от времени напряжения на вольтметре при заряде конденсатора через вольтметр $U_V = \frac{dq}{dt}(r + R_V) = \frac{U_0 R_V}{r + R_V} e^{-t/\tau_1}$, либо эквивалентное ему выражение.	1.0		
1.4	Получено или используется при решении выражение напряжения на вольтметре, учитывающее внутреннее сопротивление источника $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_V + r}$.	1.0		
1.5	Проведены экспериментальные измерения, необходимые для определения τ_1 . Общее количество измеренных пар значения U_1 и U_2 от 11 до 15	3.0		
	— Общее количество измеренных пар значения U_1 и U_2 от 6 до 10	2.0		
	— Общее количество измеренных пар значения U_1 и U_2 от 3 до 5	1.5		
	— Общее количество измеренных пар значения U_1 и U_2 менее 3	1.0		
1.6	Примечание: если все измерения выполнены для одной пары значений U_1 и U_2 общая оценка за пункт снижается на 0,5 балла	-0.5		

1.7	<p>На основании данных предыдущего пункта определено значение τ_1 для каждой пары значений U_1 и U_2, результаты усреднены, либо проведено усреднение значений Δt для одинаковых U_1 и U_2, на их основании определено значение τ_1. Допускается усреднение рассчитанных для каждой пары значений τ_1.</p> <p>Примечание: если для определения τ_1 используется графический метод, либо τ_1 определяется при использовании метода наименьших квадратов с помощью калькулятора при верном определении τ_1 ставится полный балл.</p>	2.0		
2.1	<p>Проведены экспериментальные измерения, необходимые для определения τ_2. Общее количество измеренных пар значения U_3 и U_4 от 11 до 15</p> <p>— Общее количество измеренных пар значения U_3 и U_4 от 6 до 10</p> <p>— Общее количество измеренных пар значения U_3 и U_4 от 3 до 5</p> <p>— Общее количество измеренных пар значения U_3 и U_4 менее 3</p>	3.0	2.0	
2.2	<p>Примечание: если все измерения выполнены для одной пары значений U_1 и U_2, общая оценка за пункт снижается на 0,5 балла</p>	-0.5		
2.3	<p>На основании данных предыдущего пункта определено значение τ_2 для каждой пары значений U_3 и U_4, результаты усреднены, либо проведено усреднение значений Δt для одинаковых U_3 и U_4, на их основании определено значение τ_2. Допускается усреднение рассчитанных для каждой пары значений τ_2.</p> <p>Примечание: если для определения τ_2 используется графический метод, либо τ_2 определяется при использовании метода наименьших квадратов с помощью калькулятора при верном определении τ_2 ставится полный балл.</p>	2.0		
2.4	<p>Экспериментально определено значение U_V при непосредственном подключении вольтметра к источнику.</p>	1.0		

2.5	На основании результатов п.8 определено значение ёмкости конденсатора $C = \tau_2/R_V$	1.0		
2.6	Получены формулы $\frac{r + R_V}{R_V} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, $\frac{r}{R_V} = \frac{\tau_1}{\tau_2} - 1$, $r = R_V \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 \right)$, позволяющие определить r через отношение $\frac{\tau_1}{\tau_2}$.	1.0		
2.7	На основании экспериментальных данных пп. 6 и 8 определено значение r .	1.0		
2.8	Для определения U_0 предложено использовать соотношение (п.4) $U_0 = U_V \frac{r+R_V}{R_V}$.	1.0		
2.9	На основании экспериментальных данных определено значение U_0 .	1.0		